De fato, podemos calcular as eq.'s de movimento na versão de Heisenberg para os operadores canônicos $(\vec{x}, \vec{\pi})$

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\,.$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{H}, \vec{x}\right] \quad , \quad \frac{d\vec{\pi}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{H}, \vec{\pi}\right] + \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t}$$

com $$\mathcal{H} = c\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + e\phi + mc^2\beta$$

$$= c\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi} + e\phi + mc^2\beta$$

$$\left[\mathcal{H}, \vec{x}\right] = c\vec{\alpha}\cdot\left[\vec{\pi}, \vec{x}\right] = -i\hbar c\vec{\alpha}\,,$$

logo: $$\frac{d\vec{x}}{dt} = c\vec{\alpha}$$

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{H}, \vec{\pi}\right] - \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= e\vec{E} + e\vec{\alpha}\times\vec{B}\,,$$

com os campos calculados como:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Procuramos o limite não-relativístico dessas equações na representação bi-spinorial

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \,, \quad \beta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) \,, \quad \vec{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\sigma} \\ \hline \vec{\sigma} & 0 \end{array}\right)$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\chi + e\phi\varphi + mc^2\varphi ,$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\varphi + e\phi\chi - mc^2\chi .$$

No limite não-relativístico, o termo dominante contém mc^2. Introduzimos funções de variação lenta no tempo:

$$\varphi = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,\Phi ,$$

$$\chi = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t}\,X ,$$

de onde:

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})X + eA^0\Phi & (1) \\ i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}X = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})\Phi + eA^0 X - 2mc^2 X & (2) \end{cases}$$

supondo que $eA^0 \ll 2mc^2$, e supondo variação temporal muito lenta, a eq. (2) é satisfeita por

$$X \simeq \frac{c(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})}{2mc^2}\Phi \ll \Phi . \quad (3)$$

Devido a esta última propriedade, Φ e X recebem os nomes de componentes "grande e pequena" de ψ. Substituindo (3) em (1) obtemos a equação de Pauli para Φ:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Phi = \left[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2m} + eA^0\right]\Phi$$

Calculamos $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2$:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 = \sigma_i\sigma_j\,\pi^i\pi^j = \tfrac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j\,\pi^i\pi^j + \sigma_j\sigma_i\,\pi^j\pi^i)$$

lembrar $\quad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i + 2\delta_{ij}$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 = \frac{1}{4}\Big(\sigma_i\sigma_j\,\pi^i\pi^j + (-\sigma_j\sigma_i + 2\delta_{ij})\,\pi^i\pi^j +$$

$$+\,\sigma_j\sigma_i\,\pi^j\pi^i + (-\sigma_i\sigma_j + 2\delta_{ij})\,\pi^j\pi^i\Big)$$

$$= \delta_{ij}\,\pi^i\pi^j + \frac{1}{4}[\sigma_i,\sigma_j][\pi^i,\pi^j]$$

Lembrar do primeiro semestre que:

$$[\pi^i,\pi^j] = \left(\frac{i\hbar e}{c}\right)\epsilon^{ijk}B_k .$$

Também

$$[\sigma_i,\sigma_j] = 2i\,\epsilon_{ijl}\sigma^l$$

$$[\sigma_i,\sigma_j][\pi^i,\pi^j] = -2\left(\frac{\hbar e}{c}\right)\underbrace{\epsilon_{ijl}\,\epsilon^{ijk}}_{2\delta^k_l}\sigma^l B_k$$

$$= -4\left(\frac{\hbar e}{c}\right)(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^{\,2} - \frac{\hbar e}{c}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})$$

e a eq. de Pauli fica:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \left[\frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{\hbar e}{2mc}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) + eA^0 \right] \Phi$$

A única parte dependente do spin aparece na interação magnética

$$-\frac{\hbar e}{2mc}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} ,$$

onde $\vec{\mu}$ é o momento magnético da partícula carregada

$$\vec{\mu} = \frac{e}{mc}\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\right) = \frac{e}{mc}\vec{S}$$

$$= 2\left(\frac{e}{2mc}\right)\vec{S} = g\left(\frac{e}{2mc}\right)\vec{S}$$

$g = 2$, razão giromagnética do elétron!

O momento magnético, em valor absoluto, é

$$|\vec{\mu}| = \frac{\hbar|e|}{2mc} = \mu_B , \text{ magneton de Bohr}$$

• <u>Exer</u>: A eq. de Pauli pode ser ainda reduzida mais, se considerarmos um campo magnético uniforme $\vec{B}$, com o gauge

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{x}) .$$

Negligenciando termos quadráticos em A (aproximação de campo fraco), obtemos:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Phi = \left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e}{2mc}(\vec{L}+g\vec{S})\cdot\vec{B} + eA^0\right]\Phi$$

§ Transformação de Foldy – Wouthuysen

Tentamos agora um desacoplamento sistemático entre as componentes grandes e pequenas, usando o formalismo das transformações canônicas:

$$\psi \to e^{iS}\psi = \psi',$$
$$\mathcal{H} \to e^{iS}\mathcal{H}e^{-iS} = \mathcal{H}',$$

de maneira de eliminar os termos (chamados ímpares) que acoplam as componentes grandes e pequenas. Escrever S como

$$S = -\frac{i}{2mc}\,\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\,\theta\,\frac{mc}{|\vec{p}|}$$

Assim:

$$\mathcal{H}' = e^{iS}(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+mc^2\beta)e^{-iS} = e^{iS}\beta\,(c\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+mc^2)e^{-iS}$$
$$= e^{iS}\beta e^{-iS}(c\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+mc^2)\;,$$

porque S comuta com $\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})$

$$\beta e^{-iS} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\frac{(-i)^n}{(2mc)^n}\,\beta\,\frac{[\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})]^n}{|\vec{p}|^n}\,\theta^n$$

precisamos calcular $\beta\,[\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})]^n = (-1)^n[\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})]^n\beta$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\theta^n}{\cancel{(2mc)^n}} \left[\frac{\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})}{|\vec{p}|^n}\right]^n \beta = e^{iS}\beta$$

Assim:

$$\mathcal{H}' = e^{2iS}\beta\,(c\beta\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2)$$

$$= e^{2iS}(c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta)$$

$$[\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})]^2 = -|\vec{p}|^2$$

$$\exp 2iS = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\theta^n}{|\vec{p}|^n} [\beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\theta^n}{|\vec{p}|^n} (\vec{\gamma}\cdot\vec{p})^n$$

$$= \cos\theta + \beta\frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})}{|\vec{p}|}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathcal{H}' = \left(\cos\theta + \beta\frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})}{|\vec{p}|}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\left(c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta\right)$$

$$= \left(mc^2\cos\theta\,\beta + \beta(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\ \ (\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\frac{c}{|\vec{p}|}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$+ \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\left(c|\vec{p}|\cos\theta - mc^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$= \beta\left(mc^2\cos\theta + c|\vec{p}|\,\mathrm{sen}\,\theta\right) +$$

$$+ \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\left(c|\vec{p}|\cos\theta - mc^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Podemos cancelar o termo ímpar escolhendo o ângulo da rotação

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{c|\vec{p}|}{mc^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}},$$

$$= \frac{c|\vec{p}|/mc^2}{\sqrt{1+\frac{c^2|p|^2}{m^2c^4}}}, \qquad = \frac{mc^2}{\sqrt{c^2|p|^2+m^2c^4}},$$

$$= \frac{c|\vec{p}|}{\sqrt{c^2|\vec{p}|^2+m^2c^4}})$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{c|\vec{p}|}{|E|}, \qquad \cos\theta = \frac{mc^2}{|E|}$$

A transformação pode ser pensada como uma rotação dos spinores. O Hamiltoniano transformado agora é

$$\mathcal{H}' = \beta\left(mc^2\,\frac{mc^2}{|E|} + \frac{c^2|p|^2}{|E|}\right) = \beta\sqrt{c^2|\vec{p}|^2+m^2c^4}$$

Com autovalores $\pm\sqrt{c^2|\vec{p}|^2+m^2c^4}$ e em forma diagonal.

No caso interagente, esperamos que S seja de ordem $(mc^2)^{-1}$, e neste caso expandimos $\mathcal{H}'$ até a ordem desejada. Como os campos podem depender do tempo, teremos:

$$\psi' = e^{iS}\psi$$

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\psi' &= i\hbar(i\partial_t S)\, e^{iS}\psi + e^{iS}\, i\hbar\partial_t\psi \\
&= i\hbar\,(i\partial_t S)\, e^{iS}\psi + e^{iS}\mathcal{H}\psi \\
&= \left(i\hbar\, e^{iS}(i\partial_t S)\, e^{-iS} + e^{iS}\mathcal{H}e^{-iS}\right)\psi' \\
&= e^{iS}\left(\mathcal{H} - \hbar\partial_t S\right)e^{-iS}\psi' \\
&= \mathcal{H}'\psi'
\end{aligned}$$

O Hamiltoniano transformado tem a forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}' &= e^{iS}(\mathcal{H} - \hbar\partial_t S)\,e^{-iS} \\
&= \mathcal{H} + i\,[S,\mathcal{H}] - \frac{1}{2}\,[S,[S,\mathcal{H}]]\cdots \\
&\quad - h\left(\dot{S} + i\,[S,\dot{S}] - \frac{1}{2}\,[S,[S,\dot{S}]]\cdots\right)
\end{aligned}$$

O processo pode ser iterado em ordem $(mc^2)^{-1}$, obtendo para o Hamiltoniano das soluções de energia positiva:

$$\mathcal{H} = \left[mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{\vec{p}^{\,4}}{8m^3c^2}\right] + eA^0 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

$$-i\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec{\sigma}\cdot\nabla\times\vec{E}) - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{p}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla\cdot\vec{E}$$

Incluindo soluções de energia positiva e negativa, temos:

$$\mathcal{H} = \beta\left[mc^2 + \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} \right] - \frac{e\hbar}{2mc}\beta(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})$$
$$+ eA^0 - \frac{ie\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec{\sigma}\cdot\nabla\times\vec{E}) - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\times\vec{p})$$
$$- \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\nabla\cdot\vec{E}$$

Discussão dos diferentes termos:

a) $mc^2 + \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2}$ vem da

expansão em série de $\sqrt{m^2c^4 + (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2c^2}$

b) Interação spin-órbita:
Consideremos um potencial eletrostático esfericamente simétrico, para o qual $\nabla\times\vec{E} = 0$, $\vec{E} = -\nabla A^0$. Assim

$$\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\times\vec{p}) = -\vec{\sigma}\cdot(\nabla A^0\times\vec{p}) = -\frac{1}{r}\left(\frac{dA^0}{dr}\right)\vec{\sigma}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})$$

$$\nabla A^0 = \frac{1}{r}\left(\frac{dA^0}{dr}\right)\vec{r}$$

$$\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\times\vec{p}) = -\frac{1}{r}\left(\frac{dA^0}{dr}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{L}$$

$$\mathcal{H}_{s-o} = +\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\,\frac{1}{r}\left(\frac{dA^0}{dr}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{L} = \xi(\vec{\sigma}\cdot\vec{L})$$

c) Termo de Darwin: $-\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}(\nabla\cdot\vec{E})$

Correção produzida pela flutuação rápida da carga (zitterbewegung), como resultado da interferência com as componentes de energia negativa da função de onda.

§ Resumo das propriedades da álgebra de Dirac, com a representação usual das matrizes γ^μ

i) $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i = \gamma^0\alpha^i$, $i = 1,2,3$

ii) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^i)^2 = -1$

iii) $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 = (\gamma^5)^* = (\gamma^5)^T$$

iv)

$$\gamma^0 = \beta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \vec{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\sigma} \\ \hline \vec{\sigma} & 0 \end{array}\right)$$

$$\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\sigma} \\ \hline -\vec{\sigma} & 0 \end{array}\right), \quad \gamma^5 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$$

Para as matrizes de Pauli, temos:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

v) Representação explícita:

$$\gamma^0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right), \quad \gamma^{0*} = \gamma^0 = (\gamma^0)^T = (\gamma^0)^\dagger$$

$$\gamma^1 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \end{array}\right) \quad \gamma^{1*} = \gamma^1, \; (\gamma^1)^\dagger = (\gamma^1)^T = -\gamma^1$$

$$\gamma^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & -i \\ & & i & 0 \\ \hline 0 & i & & \\ -i & 0 & & \end{array}\right) \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2, \; (\gamma^2)^T = \gamma^2, \; (\gamma^2)^\dagger = -\gamma^2$$

$$\gamma^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right) \quad \gamma^{3*} = \gamma^3, \; (\gamma^3)^\dagger = (\gamma^3)^T = -\gamma^3$$

(the empty blocks of each matrix are written as a large 0 on the page)

vi) $$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

$$(\gamma^\mu)^* = ((\gamma^\mu)^\dagger)^T = \gamma^0 (\gamma^\mu)^T \gamma^0$$

ou $\gamma^0 (\gamma^\mu)^* \gamma^0 = (\gamma^\mu)^T \Rightarrow \gamma^0 (\gamma^\mu)^* = (\gamma^\mu)^T \gamma^0$

TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE

$$
\text{T de G}\begin{cases}\psi(x) \Rightarrow e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(x)}\psi(x) = \psi'(x), \\ A_\mu \Rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x) = A'_\mu, \end{cases}
$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função arbitrária.

A derivada normal não é covariante frente a uma T de G:

$$
\partial_\mu\left(e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda}\psi\right) = e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda}\partial_\mu\psi + \\ + i\frac{e}{\hbar c}\left(\partial_\mu\Lambda\right)e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda}\psi.
$$

Introduzimos então o campo eletromagnético como um 'campo de gauge', que compensa o termo extra da derivação

$$
\partial_\mu\psi' + i\frac{e}{\hbar c}A'_\mu\psi' = \left(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A'_\mu\right)\psi'
$$

$$
= e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda}\partial_\mu\psi + \cancel{i\frac{e}{\hbar c}(\partial_\mu\Lambda)\psi'} + \frac{i}{\hbar c}e\left(A_\mu - \cancel{\partial_\mu\Lambda}\right)\psi'
$$

$$
= e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda}\left(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu\right)\psi,
$$

a grandeza acima transforma da mesma maneira que o spinor ψ

$$
\boxed{\psi' = e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda}\psi}
$$

Def. Derivada Covariante

$$D_\mu \doteq \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu ,$$

a carga 'e' é a constante de acoplamento do campo de gauge com o sistema físico. Desta forma obtemos

$$D'_\mu \psi' = e^{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda} D_\mu \psi ,$$

que transforma igual que ψ. A eq. de Dirac, em termos da derivada covariante se escreve:

$$(i\hbar \not{D} - mc)\psi = 0 ,$$

que manifestamente invariante por uma transformação de Gauge.